

Quadriken-splines und Konvexität

Claudia Bangert (Karlsruhe)

Abstract: Implizite Flächendarstellungen sind u.a. für Strahlverfolgungsverfahren (Raytracing) vorteilhafter als parametrische Darstellungen. Einfache C^1 -stetige implizite Flächen sind z.B. Splines, die aus Quadriken-segmenten bestehen. Diese Quadriken-splines können analytisch-algebraisch beschrieben oder rein geometrisch hergeleitet werden. Die geometrische Herleitung zeigt, daß die Powell-Sabin Interpolanten spezielle Quadriken-splines sind, für die Konvexitätsaussagen besonders einfach sind. Die Konvexitätskriterien werden schließlich auf allgemeine Quadriken-splines übertragen.

1 Einleitung

Verschiedene Fragestellungen des geometrischen Modellierens, beispielsweise die Schnittpunktbestimmung einer Geraden mit einer Fläche wie sie bei photorealistischer Darstellung der Fläche mittels Raytracer auftritt, lassen sich für implizite Flächen wesentlich einfacher als für parametrische lösen. Aus diesem Grund wurden u.a. Splines aus algebraischen Flächenstücken entwickelt.

Dahmen [1989] und Guo [1991] verwendeten die von Sederberg 1985 eingeführte Bézier-Darstellung für algebraische Flächen zur Konstruktion tangentebenenstetiger Flächen aus dreieckigen Quadriken-segmenten. Diese Quadriken-splines interpolieren die Punkte eines Dreiecksnetzes mit vorgegebenen Tangentebenen. In [Bangert, Prautzsch 1998a] werden diese Quadriken-splines rein geometrisch hergeleitet, wodurch sich Verallgemeinerungen der Flächen von Dahmen und Guo und insbesondere das Powell-Sabin-Schema zur Interpolation funktionaler Daten als Spezialfall ergeben.

Für Powell-Sabin-Interpolanten formulierten Carnicer und Dahmen 1992 eine hinreichende Konvexitätsaussage, deren Richtigkeit Floater jedoch 1997 durch ein Gegenbeispiel widerlegte. In [Bangert, Prautzsch 1998b] wurde eine einfache geometrische Bedingung gefunden, die sowohl notwendig als auch hinreichend für die Konvexität eines Powell-Sabin-Interpolanten ist. Diese Bedingung stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen interpolierten Punkten und zugehörigen Tangentebenen her.

Dieser Artikel stellt die geometrische Konstruktion der Quadriken-splines ([Bangert, Prautzsch 1998a]) und das Konvexitätskriterium für Powell-Sabin-Interpolanten ([Bangert, Prautzsch 1998b]) vor und überträgt das Konvexitätskriterium auf allgemeine Quadriken-splines.

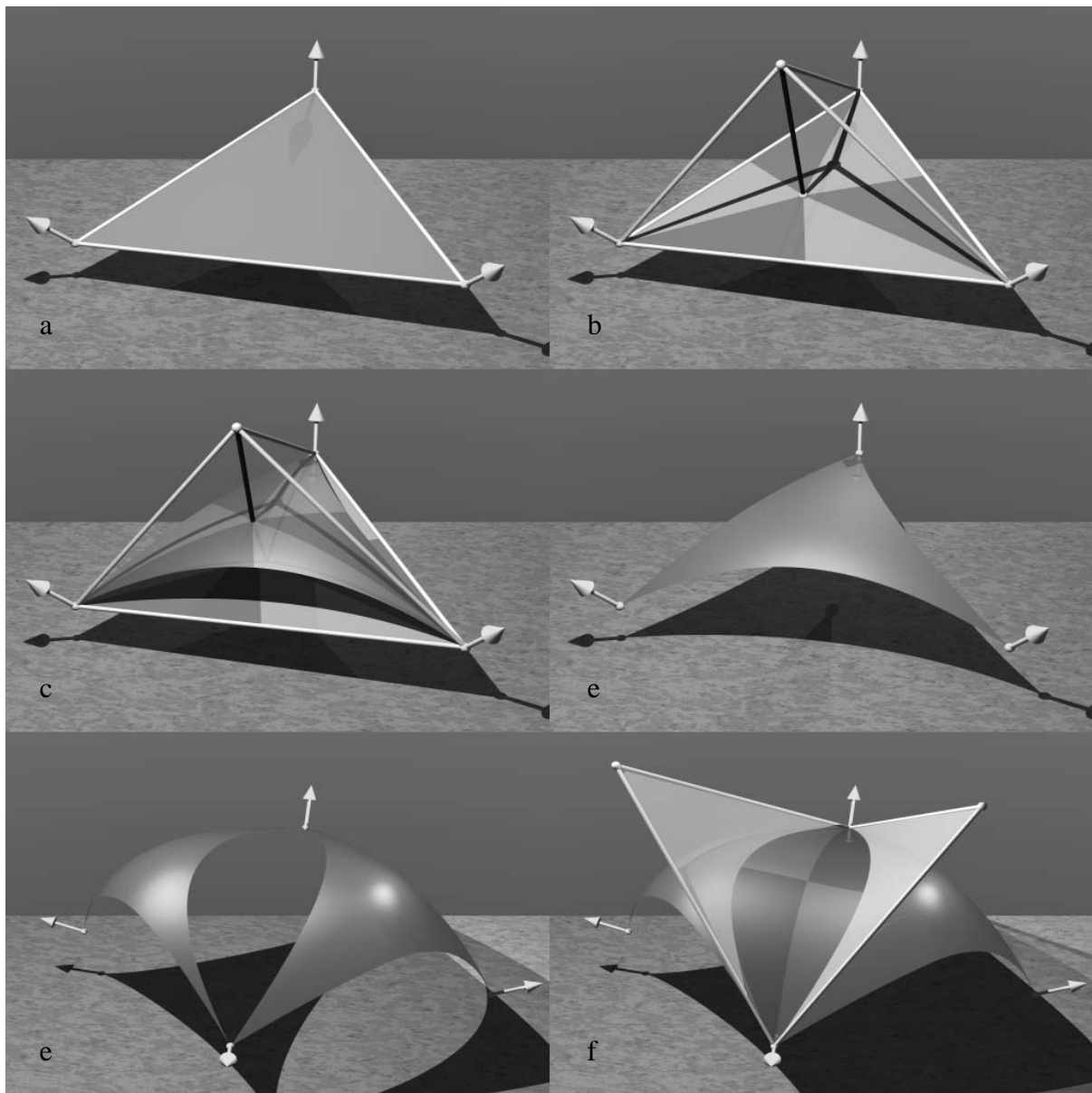


Abbildung 1: Konstruktion des Quadriksplines:

- (a) Einzeldreieck mit Normalen,
- (b) Unterteilung des Dreiecks an der transversalen Geraden (Powell-Sabin-Split),
- (c) Konstruktion sechs C^1 -stetig anschliessender Quadrikenstücke mit gemeinsamem innerem Kontaktelement auf der Transversalen,
- (d) Resultierendes Macropatch,
- (e) Zwei benachbarte Macropatche,
- (f) Mit vier weiteren Quadrikenstücken gefüllter Keil.

2 Quadrikensplines

2.1 Ausgangssituation

Gegeben sei ein räumliches Dreiecksnetz. Die Ecken des Netzes seien im folgenden durch hohle Buchstaben a, b , usw., ihre zugehörigen Tangentialebenen durch entsprechende Großbuchstaben A, B , usw. bezeichnet. Ein Punkt p mit Tangentialebene \mathcal{P} bildet ein Kontaktelement \boxed{p} .

Die Konstruktion eines Interpolanten aus Quadrikenstücken zu den Ausgangsdaten gliedert sich im wesentlichen in zwei Schritte:

- Konstruktion eines Interpolanten für die Einzeldreiecke, im folgenden als Macropatch bezeichnet.
- Glattes Verbinden der Macropatche.

An dieser Stelle werde ich nur auf den ersten Punkt genauer eingehen, eine ausführlichere Darstellung findet sich in (Bangert & Prautzsch 1998). Die gesamte Konstruktion basiert auf elementaren Kegelschnitteigenschaften, die im folgenden kurz erläutert werden.

2.2 Zweibogenkonstruktion

Bemerkung 2.1 *Gegeben sei ein Kegelschnitt mit drei Punkten a, b, c und zugehörigen Tangenten A, B und C (vergleiche Abbildung 2). Dann trennen die Tangenten B und C den Punkt a und den Schnittpunkt der Geraden bc mit der Tangente A harmonisch.*

Mit Hilfe dieser Eigenschaft läßt sich wie in Abbildung 3 ein sogenannter Zweibogen konstruieren, der aus zwei Kegelschnittbögen besteht, die sich in zwei Punkten berühren. Er ergibt sich als ebener Schnitt zweier tangentialebenenstetig anschließender Quadriken. Durch die Berührgerade, ein Kontaktelement \boxed{p} auf dieser und je ein Kontaktelement \boxed{a} bzw. \boxed{b} auf jedem der Kegelschnittbögen ist der Zweibogen bereits vollständig bestimmt. Über harmonische Verhältnisse auf den Tangenten in a bzw. b kann je ein Punkt der Tangente im zweiten Berührungspunkt q der beiden Bögen bestimmt werden (Abbildung 3).

2.3 Konstruktion des Macropatches

Betrachten wir zunächst ein einzelnes Dreieck des gegebenen Dreiecksnetzes wie in Abbildung 1(a). Drei beliebige Kontaktelemente können i.a. nicht durch eine einzige Quadrik interpoliert werden, da in der Dreiecksebene bereits drei Punkte und Tangenten des Schnittkegelschnitts der

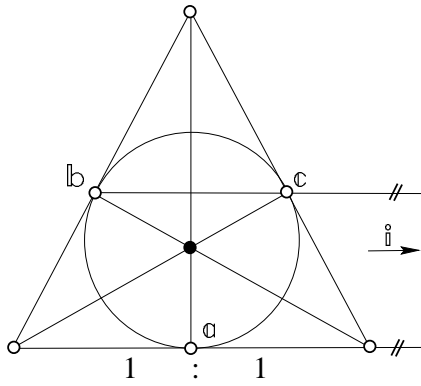


Abbildung 2: Harmonische Verhältnisse auf Kegelschnitten.

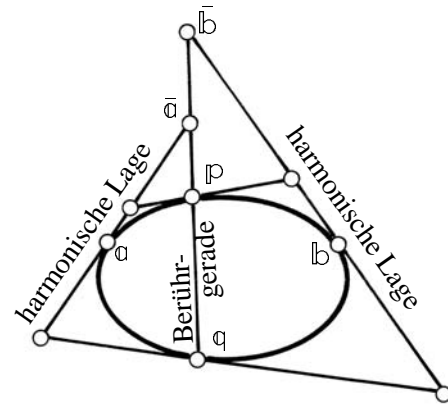


Abbildung 3: Zweibogenkonstruktion.

Ebene mit der Quadrik vorgegeben sind. Da ein Kegelschnitt jedoch bereits durch fünf Bestimmungselemente vollständig festgelegt ist, müssen die drei gegebenen Punkte und Tangenten Abhängigkeiten genügen, wie sie beispielsweise im Satz von Brianchon ausgedrückt sind. Ist dieser Satz in der Ebene der drei Punkte erfüllt, existiert also ein Kegelschnitt durch die drei Kontaktelemente, so gibt es eine ganze Schar interpolierender Quadriken mit C^1 -Kontakt in dieser Ebene. Diese wird aufgespannt durch den Kegel mit dem Kegelschnitt als Leitkurve und den Schnittpunkt der Tangentialebenen als Spitze einerseits sowie der Ebene der gegebenen Punkte (als Doppalebene gewertet) andererseits.

Da für beliebige Daten dieser Fall i.a. jedoch nicht eintritt, muß jedes Dreieck durch die Kontaktelemente \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} durch ein **Macropatch** aus sechs Quadrikenstücken wie in Abbildung 1(c) interpoliert werden. Die Übergangsebenen zwischen den Quadrikenstücken sind wie beim Powell-Sabin-Split angeordnet und treffen sich in einer gemeinsamen **transversalen Geraden** (vergleiche Abbildung 1(b)). Auf dieser Transversalen kann noch ein sogenanntes "inneres Kontaktelement" \boxed{p} , das allen sechs Quadriken des Macropatches gemeinsam ist, frei gewählt werden.

Da alle Berührebenen die Transversale enthalten, muß folglich noch ein zweites, allen 6 Quadriken gemeinsames Kontaktelement \boxed{q} auf ihr liegen. Aus den Überlegungen des vorigen Abschnitts folgt, daß die Tangentialebenen \mathcal{P} und \mathcal{Q} die gegebenen Punkte und den Schnittpunkt ihrer Tangentialebenen mit der Transversale harmonisch trennen. Hierdurch lassen sich drei Punkte konstruieren, die die Tangentialebene \mathcal{Q} und damit den zweiten Berührungspunkt q auf der Transversalen festlegen (siehe Abbildung 4).

Die drei Kontaktelemente \boxed{a} \boxed{p} und \boxed{q} können durch eine ganze Schar Quadriken mit C^1 -Kontakt in der Ebene $a p q$ interpoliert werden. Aus den Quadrikenbüscheln durch \boxed{a} \boxed{p} \boxed{q} bzw. \boxed{b} \boxed{p} \boxed{q} suchen wir nun je ein Element Q_1 bzw. Q_2 mit C^1 -Kontakt in der Trennebene zwischen a und b . Hierzu konstruieren wir einen Zweibogen in der Ebene $a p b$, der sich

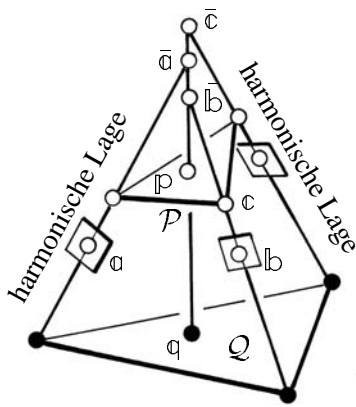


Abbildung 4: Konstruktion des zweiten gemeinsamen Kontaktelements.

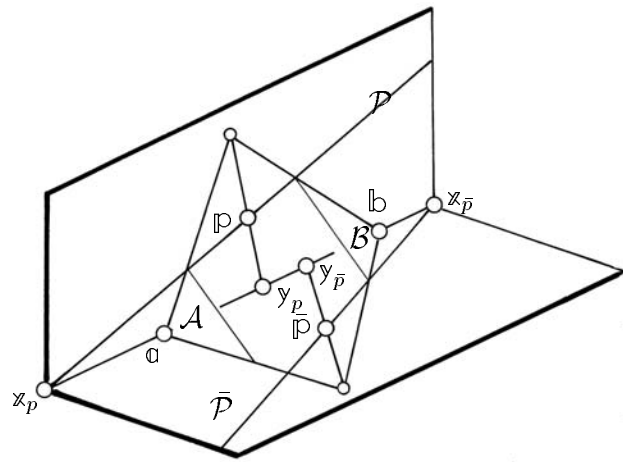


Abbildung 5: Doppelverhältnisse.

als Schnitt dieser Ebene mit Q_1 und Q_2 ergibt. Wir erhalten einen zweiten Berührungspunkt in der Trennebene, durch den die gesuchten Elemente der Quadrikenfamilien eindeutig festgelegt sind.

Analog lassen sich die weiteren vier Quadriken des Macropatches konstruieren. Die Tangentialebenenstetigkeit des Patches ist durch die Bündelzugehörigkeit der einzelnen Quadriken garantiert. Das Macropatch ist somit durch die Ausgangsdaten, das innere Kontaktelement und die Übergangsebenen vollständig bestimmt und eindeutig festgelegt.

2.4 Verbinden der Macropatche

Benachbarte Macropatche lassen sich i.a. leider nicht direkt tangentialebenenstetig anschließen. Unter gewissen Bedingungen kann der "Keil" zwischen ihnen jedoch mit vier weiteren Quadrikenstücken wie in Abbildung 1(f) glatt gefüllt werden.

Hierzu müssen zunächst die transversalen Geraden benachbarter Macropatche koplanar sein. Weiterhin müssen die bisher frei gewählten inneren Tangentialebenen der Macropatche folgenden einfachen linearen Abhängigkeiten genügen:

Satz 2.2 Sei x_p der Schnittpunkt der Geraden $a \parallel b$ mit der inneren Tangentialebene \mathcal{P} . y_p bezeichne den Schnittpunkt von $a \parallel b$ mit der Ebene im Bündel der Tangentialebenen \mathcal{A} und \mathcal{B} durch p . Die entsprechenden Punkte des Nachbarmacropatches seien wie in Abbildung 5 mit Querstrichen versehen.

Dann lassen sich zwei Macropatche genau dann tangentialebenenstetig verbinden, wenn die Doppelverhältnisse

$$DV [a \parallel b \ x_p \ y_p] = DV [a \parallel b \ x_{\bar{p}} \ y_{\bar{p}}]$$

übereinstimmen.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [Bangert & Prautzsch 1998].

Satz 2.2 beschreibt globale Abhängigkeiten zwischen den Tangentialebenen in den inneren Punkten benachbarter Macropatches. Ist nämlich das Kontaktelement $\boxed{\mathfrak{p}}$ des einen Macropatches festgelegt, so läßt sich die Tangentialebene $\bar{\mathcal{P}}$ im inneren Kontaktelement $\boxed{\bar{\mathfrak{p}}}$ des Nachbarpatches nur noch um die Gerade $\bar{\mathfrak{p}}\times_{\bar{\mathfrak{p}}}$ frei drehen.

Zulässige Tangentialebenenkonfigurationen, d.h. Konfigurationen, die den Bedingungen von Satz 2.2 genügen, lassen sich jedoch einfach durch Zuordnung eines festen Gewichtes zu den Punkten des gegebenen Netzes gewinnen. Die inneren Tangentialebenen bestimmen sich dann für jedes Dreieck lokal aus einem linearen Gleichungssystem, das nur noch von den Daten des jeweiligen Dreiecks abhängt.

3 Powell-Sabin-Interpolanten

3.1 Powell-Sabin-Interpolanten

Ein Powell-Sabin-Interpolant ist eine stückweise quadratische bivariate Funktion. Er interpoliert Funktionswerte f_i und Gradienten ∇f_i , die über einem Dreiecksgitter in der Parameterebene angeordnet sind. Dabei wird jedes Dreieck durch Einfügen eines inneren Punktes in sechs dreieckige Bereiche unterteilt, zu denen je eine quadratische Funktion mit C^1 -Kontakt an den Rändern bestimmt wird. Powell und Sabin zeigten 1977, daß bei gegebenen Unterteilungspunkten der quadratische C^1 -Interpolant existiert und eindeutig bestimmt ist.

3.2 Powell-Sabin-Interpolanten als Quadriken-splines

Die im vorigen Abschnitt gegebenen Parameter- und Funktionswerte definieren Punkte eines räumlichen Dreiecksnetzes, die Gradienten legen zugehörige Tangentialebenen fest, die sich durch einen Quadriken-spline interpolieren lassen.

Wird der gemeinsame innere Berührungspunkt \mathfrak{p} aller Macropatche als Fernpunkt der z -Achse und die zugehörige Tangentialebene als Fenebene gewählt, so sind alle Quadriken der Macropatche Paraboloiden, die quadratische Polynome über der x - y -Ebene definieren. Liegen zusätzlich die Randebenen des jeweiligen Patches parallel zur z -Achse, so ist das Macropatch ein Powell-Sabin-Element. Da die inneren Kontaktelemente benachbarter Macropatche übereinstimmen, entfällt die Keilkonstruktion und die Macropatche stoßen direkt tangentialebenenstetig aneinander.

In diesem Spezialfall werden viele Konstruktionen einfacher: Die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes für das zweite Kontaktelement wird zur Mittelpunkt konstruktion. Werden

die Transversalen speziell durch den Schnittpunkt der Tangentialebenen des zugehörigen Dreiecks gewählt, so sind die Tangentialebenen im zweiten gemeinsamen Kontaktelement eines Macropatches jeweils parallel zur zugehörigen Dreiecksebene. Für diesen Spezialfall werden im folgenden Konvexitätsbetrachtungen angestellt.

4 Konvexität

4.1 Konvexe Powell-Sabin-Interpolanten

Gegeben seien streng konvexe Daten mit “wohlassoziierten” Tangentialebenen, d.h. die Projektion des Schnittpunkts der Tangentialebenen parallel zur z -Achse liege im Inneren des zugehörigen Dreiecks. Dieser Punkt wird als Unterteilungspunkt für das interpolierende Powell-Sabin-Element gewählt. Die Transversalen in der Konstruktion des Powell-Sabin-Elements als Quadriken spline enthalten also den Schnittpunkt der Tangentialebenen und sind parallel zur z -Achse.

Unter diesen Bedingungen folgerten Carnicer und Dahmen 1992, daß der zugehörige Powell-Sabin Interpolant konvex sei. In ihrem Beweis wird die Konvexität des Bézier-Polygons des Interpolanten verwendet, die jedoch nicht immer gegeben ist. Floater veröffentlichte 1997 ein Gegenbeispiel zu ihrer Behauptung (siehe Abbildung 8).

Mit einer Zusatzforderung an die Tangentialebenen läßt sich jedoch die Konvexität des Powell-Sabin-Splines garantieren, nach [Bangert, Prautzsch 1998b] gilt:

Satz 4.1 *Ein wie oben konstruiertes Powell-Sabin-Element ist genau dann konvex, wenn das Dreieck der interpolierten Punkte im Inneren des zugehörigen Tangentialebenenendreiecks liegt.*

Das Tangentialebenenendreieck ist hierbei das Dreieck, das sich durch den Schnitt der Tangentialebenen mit der Ebene der drei Punkte ergibt (siehe Abbildung 7).

Sind alle beteiligten Powell-Sabin-Elemente konvex, so ist wegen der C^1 -Übergänge auch der gesamte Quadriken spline konvex.

4.2 Beweis der Konvexitätsaussage

Die Aussage von Satz 4.1 folgt unmittelbar aus der geometrischen Konstruktion des Powell-Sabin-Interpolanten. Der Beweis in [Bangert, Prautzsch 1998b] verwendet folgendes einfache Kriterium:

Bemerkung 4.2 *Eine Quadrik ist genau dann oval, wenn eine beliebige Tangentialebene einen beliebigen regulären Kegelschnitt auf ihr in keinem reellen Punkt schneidet.*

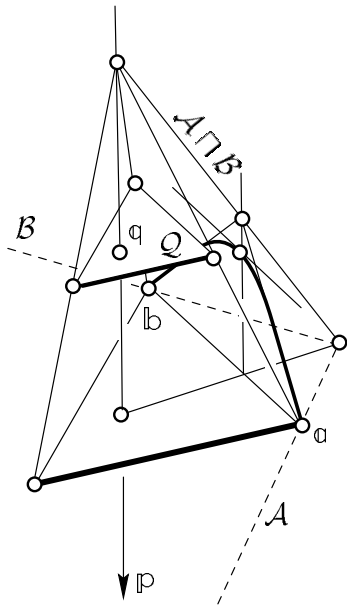


Abbildung 6: Konstruktion des Powell-Sabin-Elements mit Zweibogenkonstruktion in der Randebene.

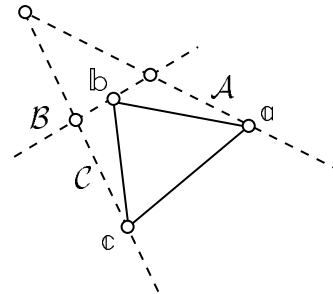
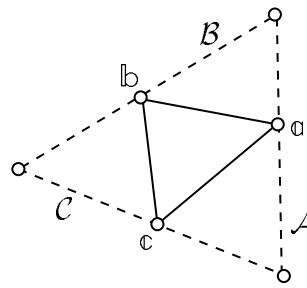


Abbildung 7: Punktdreieck liegt im Inneren des Tangentialebenen-dreiecks (oben) bzw. außerhalb (unteres Bild).

Besteht der Powell-Sabin-Interpolant nur aus ovalen Quadrikenstücken, ist er konvex.

Gemäß Bemerkung 4.2 wird die Tangentialebene im zweiten inneren Punkt q (ungleich dem Fernpunkt) mit den Zweibögen in den Randebenen des Macropatches geschnitten. Die Tangentialebene ist aufgrund der speziellen Wahl der Transversalen parallel zur Dreiecksebene. Der Zweibogen besteht aus 2 Parabelbögen, die jeweils den Fernpunkt der z -Achse enthalten und deren zweite gemeinsame Tangente ebenfalls parallel zur Dreiecksebene liegt (siehe Abbildung 6). Damit nun kein Schnitt zwischen beispielsweise dem Zweibogen durch a und b und der Tangentialebene Q auftritt, müssen der Durchstoßpunkt von $A \cap B$ durch die Dreiecksebene abc sowie der Punkt c auf verschiedenen Seiten der Kante ab liegen. Hieraus folgt sofort die Aussage von Satz 4.1.

4.3 Konvexe Quadrikensplines

Liegt das spezielle Transversalensystem durch den Schnitt der Tangentialebenen vor, so lassen sich Konvexitätsbetrachtungen für Powell-Sabin-Elemente auf allgemeine Macropatche übertragen. Ein beliebiges Macropatch läßt sich projektiv auf die Powell-Sabin-Konfiguration abbilden. Jedes Quadrikenstück eines konvexen Macropatches ist Teil einer ovalen Quadrik, das projektive Bild ebenfalls. Bei der Formulierung des allgemeinen Konvexitätskriteriums ist jedoch zu berücksichtigen, inwieweit die projektive Abbildung die Lage des Tangentialebenen-dreiecks beeinflusst. Schneidet nämlich die innere Tangentialebene des Macropatches das Tan-

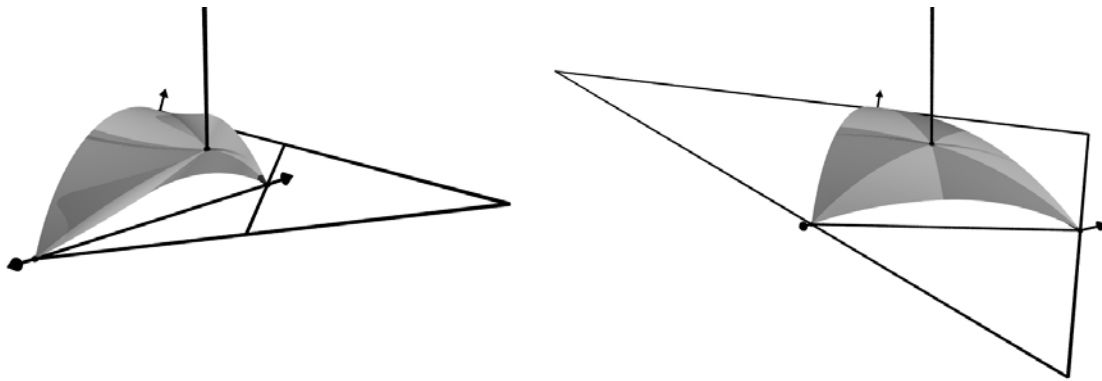


Abbildung 8: Powell-Sabin-Interpolanten streng konvexer Daten mit wohlassozierten Tangentialebenen (durch ihre Normalenvektoren und die Schnittgeraden mit der jeweiligen Punktebene dargestellt). Rechts ist Satz 4.1 erfüllt, links nicht.

gentialebenenendreieck, so ändert sich die Lage von Punkt- und Tangentialebenenendreieck durch die projektive Abbildung.

Aus denselben Gründen ist die Konvexität unabhängig von der Lage des inneren Punktes ρ zwischen dem Schnittpunkt der Tangentialebenen und der Dreiecksebene. Er läßt sich durch eine Perspektivität, die den Schnittpunkt der Tangentialebenen geradenweise und die Dreiecksebene punktweise fest läßt, in jede gewünschte Lage bringen.

4.4 Offene Fragen

Momentan wird noch untersucht, inwieweit sich durch geschickte Wahl der Randebenen eine konvexe Keilkonstruktion realisieren läßt. Weiterhin bietet noch der Durchstoßpunkt der Transversalen durch die Dreiecksebene einen zusätzlichen Freiheitsgrad.

Bei beliebigen Transversalensystemen werden Konvexitätsbetrachtungen wesentlich komplexer, da beispielsweise parallele Ebenen in der Konstruktion des Macropatches wegfallen. Ebenfalls noch offen ist die Frage, inwieweit (und v.a. wie) sich passende Tangentialebenen zu gegebenen konvexen Punktdaten konstruieren lassen, so daß der resultierende Quadriken spline konvex ist.

Literatur

- C. Bangert, H. Prautzsch** (1998a). A geometric criterion for the convexity of Powell-Sabin-Elements. in preparation, 1998.
- C. Bangert, H. Prautzsch** (1998b). Quadric splines. Submitted to CAGD, 1998.
- W. Dahmen** (1989). Smooth piecewise quadric surfaces. In **T. Lyche, L. Schumaker** (Hrsg.) (1989), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, S. 181–194. Academic Press, 1989.
- M.S. Floater** (1997). A counterexample to a theorem about the convexity of Powell-Sabin elements. *Computer Aided Geometric Design*, 14:383–385.
- B. Guo** (1991). Modeling Arbitrary Smooth Objects with Algebraic Surfaces. Technical Report CORNELLCS//TR91-1226, Cornell University, Computer Science Department, August 1991.
- B. Guo** (1995). Quadric and cubic bitetrahedral patches. *The Visual Computer*, 11(5):253–262. ISSN 0178-2789.
- K. Willemans and P. Dierckx** (1994). Surface fitting using convex Powell-Sabin splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 56(3):263–282.
- M.J.D. Powell, M.A. Sabin** (1977). Piecewise Quadratic Approximations on Triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3(4):316–325.
- T. Sederberg** (1985). Piecewise algebraic surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, 2(1-3):53–60.

Claudia Bangert
Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
Abteilung geometrische Datenverarbeitung
D-76128 Karlsruhe
email: Claudia.Bangert@informatik.uni-karlsruhe.de